Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
DMCC

Cuarta prueba parcial
Cálculo Aplicado

Santiago, 31 de enero de 2012

1) Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes, justificadamente

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ $\qquad b)\sum_{n=2}^{\infty}e^{-n}$ $\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

2) Se deja caer una pelota desde una altura de 30 metros. Cada vez que toca el suelo rebota a $\frac{1}{3}$ de la altura del salto anterior. Hallar la distancia total que recorre la pelota si se deja rebotar indefinidamente

3) Determine el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^3}$

4) Encuentre el desarrollo, como una serie de potencias, de la función $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$

Cada tema se evalúa con un máximo de 1,5 puntos

1 a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Como $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}$ usando comparación con la serie p, p = 2, siendo esta una serie convergente, obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ es convergente.

(Se puede decidir con otros criterios)

1 b) $\sum_{n=2}^{\infty}e^{-n}$

La serie corresponde a una serie geométrica con $r=\frac{1}{e}<1$, entonces la serie converge a $\frac{1}{e(e-1)}$

1 c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

Es una serie alternante, como $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ es decreciente ($a_{n+1}=\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}=a_n$ *para* todo n) y $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ entonces la serie es convergente

2 Sea S la cantidad de metros recorridos por la pelota y

$S_1=30\,, S_2=30\cdot\frac{1}{3}, S_3=30\cdot(\frac{1}{3})^2,\ldots$ entonces $S=30+2(10+30\cdot\frac{1}{3}+30\cdot(\frac{1}{3})^2+....)$

Estamos frente a una serie geométrica con razón $\frac{1}{3}$, de donde,

$$S=30+2\cdot\frac{10}{1-\frac{1}{3}}=60 \text{ metros}$$

3) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{(x-3)^n}{n^3}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}\cdot n^3}{(n+1)^3(x-3)^n}\right|=|x-3|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3=|x-3|$

La serie es absolutamente convergente si $|x-3|<1$, es decir si $2<x<4$

Analicemos los extremos del intervalo

Si $x = 2$ la serie queda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$, alternante, .como $n+1 > n$ entonces $\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$ de donde $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ es decreciente y como $\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{1}{n^3} = 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ es convergente

Si $x = 4$ la serie queda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, convergente ya que es una serie p con p = 3

Así, intervalo de convergencia es $[2,4] \subset R$

4) Como la serie $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge para todo numero real x entonces

$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$, de donde

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\infty} t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \forall x \in R$$